Problema 1

Encontrar el menor número positivo divisible por 999 y que no tenga el dígito 9.

Solución

La suma de las cifras agrupadas de 3 en 3 debe ser múltiplo de 999. Para que sea el múltiplo más pequeño, la suma de las cifras debe ser 999. Para conseguir una suma 999 con dos cifras que no incluyan ningún nueve, y una de ellas mínima, tienen que ser 111 + 888, pues 888 es el máximo número de tres cifras que no incluye el 9. Por tanto, el número pedido es: 111888 = 112*999

Solución: Ignacio Larrosa Cañestro-La Coruña España

Problema 2

Los lados de un triángulo son proporcionales a las raíces de la ecuación cúbica: $x^3-ax^2+bx-c=0$. Encontrar la suma de los cosenos de los ángulos del triángulo.

Solución

Sean *p, q* y *r* las raíces de la ecuación.

Las relaciones de Cardano-Vieta nos dan:

$p + q + r = a$

$pq + pr + qr = b$

$pqr = c$

Por otra parte, llamando *P, Q* y *R* a los ángulos del triángulo,

$cos(P) = (q^2 + r^2 - p^2)/(2qr)$

$cos(Q) = (p^2 + r^2 - q^2)/(2pr)$

$cos(R) = (p^2 + q^2 - r^2)/(2pq)$

Y la suma de los tres,

$$S= \frac{1}{2}\left(\frac{q}{r}+\frac{r}{q}+\frac{p}{r}+\frac{r}{p}+\frac{p}{q}+\frac{r}{q}-\frac{p^2}{qr}+\frac{q^2}{pr}+\frac{r^2}{pq}\right)$$

Tenemos que:

$(p + q + r)^2 = p^2 + q^2 + r^2 + 2(pq + pr + qr) \Rightarrow p^2 + q^2 + r^2 = a^2 - 2b$

De otro lado, despejando x^3, sustituyendo por *p, q* y *r* y sumando,

$p^3 + q^3 + r^3 = a(p^2 + q^2 + r^2) - b(p + q + r) + 3c = a^3 - 2ab - ab +3c = a^3 - 3ab + 3c$

Por otra parte,

$a^3 = (p + q + r)^3 = p^3 + q^3 + r^3 + 3(p^{2q} + p^{2r} + q^{2p} + q^{2r} + r^{2p} + r^{2q}) + 6pqr$

$p^{2q} + p^{2r} + q^{2p} + q^{2r} + r^{2p} + r^{2q} = (a^3 - (a^3 - 3ab + 3c) - 6c)/3 = ab - 3c$

Dividiendo por $c = pqr$

$$\frac{p}{r}+\frac{p}{q}+\frac{q}{r}+\frac{q}{p}+\frac{r}{q}+\frac{r}{p}=\frac{ab}{c}-3$$

De otro lado,

$

$$\frac{p^2}{qr}+\frac{q^2}{pr}+\frac{r^2}{pq}=\frac{(p^3+q^3+r^3)}{pqr}=\frac{a^3-3ab+3c}{c}=\frac{a^3}{c}-\frac{3ab}{c}+3$$

Con lo que nos queda,

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c}-3-\left(\frac{a^3}{c}-\frac{3ab}{c}+3\right)\right)=\frac{\frac{4ab}{c}-\frac{a^3}{c}-6}{2}$$

Solución: Ignacio Larrosa Cañestro-La Coruña España

Problema 3

¿Para que dígitos *x* e *y* la siguiente ecuación: $\overline{xxyy} = \overline{xx}^{\,2} + \overline{yy}^{\,2}$ es válida?

Solución

$1100x + 11y = 121(x^2 + y^2) \Rightarrow 100x + y = 11(x^2 + y^2)$

Para que $100x + y$ sea múltiplo de 11, debe ser $x + y = 11$. Pero entonces $100x + y = x0y = 99x + 11 = 11(9x + 1)$ con lo que queda

$9x + 1 = x^2 + y^2$

$9x + 1 = x^2 + (11-x)^2$

$2x^2-31x+120 = 0$

$x_1 = 8,\ x_2=15/2.$

Evidentemente solo nos vale el 8, y tenemos que: $8833 = 88^2 + 33^2$

Solución: Ignacio Larrosa Cañestro-La Coruña España

Problema 4

A ver como nos va con esta:

ALPHA + BETA + GAMMA = OMEGA

Donde *OMEGA* es el mayor posible.

Solución

Tenemos que 3*A* = *A* (*mod 10*) $\Rightarrow$ *A* = 0,5

Como *A* es la inicial de *ALPHA*, debe ser distinto de 0, por lo que *A* = 5. Queda *5LPH5 + BET5 + G5MM5 = OMEG5*.

A partir de aquí, obtengo ocho soluciones, 4 con *OMEGA* = 76915 y 4 con *OMEGA* = 80625. Son

ALPHA	*BETA*	*GAMMA*	*OMEGA*
52305	8945	15665	76915
52345	8905	15665	76915
58305	2945	15665	76915

58345	2905	15665	76915
51945	3675	25005	80625
51975	3645	25005	80625
53945	1675	25005	80625
53975	1645	25005	80625

Como se ve, los valores de *L* y *B* son intercambiables, así como los de *H* y *T*.

Solución: Ignacio Larrosa Cañestro-La Coruña España

Problema 5

En su cumpleaños del año 1975, John alcanza una edad que es igual a la suma de los dígitos del año en que nació. ¿En que año nació?

Solución 1

Voy a suponer que John nació después de 1900. Luego el año de su nacimiento tiene

aspecto de $\overline{19ab}$, es decir, el año es $1000 + 900 + 10a + b$

Luego su edad es $1975 - (1000 + 900 + 10a + b) = 75 - 10a - b$

La suma de los dígitos del año en que nació es: $1 + 9 + a + b = 10 + a + b$

Como la edad es igual a la suma de los dígitos: $75 - 10a - b = 10 + a + b$

$65 - 11a - 2b = 0$

$b = (65 - 11a)/2$

Si $a = 1 \Rightarrow b = 54/2 = 27$ Absurdo, porque *b* es de una cifra

Si $a = 2 \Rightarrow b = (65 -22)/2 = 43/2$ Absurdo

Si $a = 3 \Rightarrow b = (65 -33)/2 = 32/2 = 16$ Absurdo

Si $a = 4 \Rightarrow b = (65 - 44)/2 = 21/2$ Absurdo

Si $a = 5 \Rightarrow b = (65 - 55)/2 = 10/2 = 5$

Esto ya cumple, el año es 1955 y la edad (1975-1955) = 20, que coincide con la suma de las cifras.

Si $a>5$ obtendríamos una *b* negativa, lo cual es absurdo, luego la solución es única.

Tendría que repetirse para alguien nacido en el siglo XIX, pero a mi no me apetece buscar la edad de un centenario... o por lo menos vejete.

Solución: Elisenda Font - Barcelona (España)

Solución 2

He tenido en cuenta que 1+9=10, luego el año de nacimiento es anterior a 1965. la década de los 50 varia entre 1950 que suman 15 y años serían 25, y 1959 que suman 24 y años 16. Observamos que 15+25=40 y 24+16=40, donde se encuentren será la solución. Es en 20+20, es decir 20 años y dígitos sumando 20, ya tenemos 1 y 9, en la década de los 50 solo el 55 suma los otros 10 que necesitamos. Solución 1955

Solución: Juan Jose Bienzobas - Barcelona (España)

Problema 6

Resolver esta interesante alfanumérica: $3 * \overline{ONE} * \overline{ONE} = \overline{THREE}$

Solución

$\overline{ONE} = \sqrt{\dfrac{\overline{THREE}}{3}} \leq \sqrt{33333} = 182$

Por tanto, $O = 1$, $T \geq 3$.

Para E tenemos que $3*E^2 = E \pmod{10} \Rightarrow E = 0, 2, 5, 7$

El 2 esta descartado, pues $\overline{1NE}$ sería par, y por tanto $\overline{THREE}$ múltiplo de 4, lo que es imposible si acaba en 22. El 5 también esta descartado, pues $\overline{THREE}$ sería múltiplo de 25 y no podría acabar en 55. Entonces, tenemos dos posibilidades:

a) E = 0. Nos queda reducido a

$3*1N*1N = \overline{THR}$

$300 + 60*N + 3N^2 = \overline{THR}$

Pero $N = 9 \Rightarrow \overline{THR} = 1083$, no

$N = 8 \Rightarrow \overline{THR} = 972 \Rightarrow$ Si

$N = 7 \Rightarrow \overline{THR} = 867$, no

$N = 6 \Rightarrow \overline{THR} = 768$, no

$N = 5 \Rightarrow \overline{THR} = 675$, no

$N = 4 \Rightarrow \overline{THR} = 588$, no

$N = 3 \Rightarrow \overline{THR} = 507$, no

$N = 2 \Rightarrow \overline{THR} = 432$, no

b) $E = 7$. No puede ser, pues la penúltima cifra de $(\overline{1N7})^2$ es par, y al multiplicar por 3, nunca podría dar 7 la penúltima cifra del resultado. Por tanto, la única solución es

$3 * \overline{ONE} * \overline{ONE} = \overline{THREE}$

$3*180*180 = 97200$

Solución: Ignacio Larrosa Cañestro-La Coruña España

Problema 7

¿Cual es el mayor y menor número de "viernes 13" de un mes cualquiera que pueden ocurrir en un año cualquiera?

Solución

Primero hay que diferenciar dos tipos de años, normales y bisiestos.

Años normales:

Días de los meses:

(31,28,31,30,31,30,31,31,30,31,30,31)

en aritmética modular 7:

(3,0,3,2,3,2,3,3,2,3,2,3)

Sumatoria modular 7:

(0,3,3,6,1,4,6,2,5,0,3,5)

El número que más se repite es el 3 que se repite 3 veces por lo que en un año normal habrá como mucho 3 viernes 13

Los números que menos se repiten son el 1,2, y el 4, que se repiten 1 vez por lo que en un año normal habrá como mínimo 1 viernes 13.

Años Bisiestos:

Sumatoria modular:

(0,3,4,0,2,5,0,3,6,1,4,6)

El número que más se repite es el 0 que se repite 3 veces, por lo que en un año bisiesto habrá como mucho 3 viernes 13

Los números que menos se repiten son el 1,2, 5, que se repiten 1 vez, por lo que en un año bisiesto habrá como mínimo 1 viernes 13

En un año cualquiera el mínimo de viernes 13 es 1, y el máximo 3.

Solución: Tny - a.porrua@gmail.com

Problema 8

La bóveda de un Banco tiene *N* cerraduras que deben ser probadas simultáneamente para abrirla. Cinco ejecutivos tienen algunas de la llaves, de tal manera que cualquiera tres de ellos pueden abrir la bóveda, pero ningún par puede hacerlo. Determinar el menor valor de *N*.

Solución

A cualquier par que elija le tiene que faltar una llave, que la tiene cualquiera de los otros tres. Combinaciones de 2 tomadas entre 5 son 10, necesito 10 llaves.

1 2 3 llave A 1 2 4 llave B

1 2 5 llave C 1 3 4 llave D

1 3 5 llave E 1 4 5 llave F

2 3 4 llave G 2 3 5 llave H

2 4 5 llave I 3 4 5 llave J

Cada ejecutivo tiene 6 llaves.

Solución: Dany

Problema 9

Larry, Curly y Moe tienen una inusual combinación de edades. La suma de dos de las tres edades da una edad que es la inversa de la otra. Todas suman menos de 100 años.

a) ¿Cuál es la suma de las tres edades?

b) Si Larry es el mas viejo de los tres, ¿Qué edad tiene el menor?

Olimpiadas Internacionales
Problemas Resueltos N° 1 2006

Solución

Larry=$10a+b$

Curly=$10c+d$

Moe=$10e+f$

$10a+b+10c+d=10f+e$

$10a+b+10e+f=10d+c$

$10e+f+10c+d=10b+a$

Sumando las tres ecuaciones:

$19a+19f+19c=8b+8d+8e$

$19(a+f+c)=8(b+d+e)$

Única posibilidad $a+f+c=8$ y $b+d+e=19$

La suma de las 3 edades da entonces

8.10+19=99

1+2+5=8

8+7+4=19

Larry tiene entonces 54, el menor 18 y el otro 27, comprobamos

18+27=45 inverso 54

18+54=72 inverso 27

27+54=81 inverso 18

Solución: Pablo Adrián Sussi

Problema 10

Un grupo de piratas se dispone a repartirse por partes iguales una cierta cantidad de monedas de oro. Al hacerlo advierten que la cantidad que les toca a cada uno es el mismo número de monedas original con sus cifras en orden invertido. Empieza una discusión en este momento a raíz de lo curioso de esta situación. La discusión deriva en furiosa pelea, y terminan muriendo varios piratas y cayendo al mar cientos de monedas de oro. Los piratas restantes deciden realizar nuevamente el reparto por partes iguales. Y otra vez el número de monedas que les toca a cada uno es el mismo número de monedas del total con sus cifras en orden invertido. ¿Cuántos piratas murieron?

Fuente: Propuesto por: Emilio Martín (Alicante)

Solución

9 piratas se repartían 9801 monedas, tocando a 1089.

Mueren 5 piratas, caen 1089 monedas al mar.

Quedan 8712 monedas, para 4 piratas a 2178 monedas cada uno.

Muy buen problema, y difícil la primera parte ya que no se piensa en probar el 9 como posible solución. Por cierto, les tocó el doble que al principio.

Solución: Jesús Sanz